

## ANÁLISIS DE BIFURCACIONES GLOBALES EN MODELOS DE CALIDAD AMBIENTAL

La teoría de bifurcaciones forma parte de la teoría general de sistemas dinámicos y se origina junto con la moderna teoría cualitativa, al final del siglo XIX cuando Poincaré introduce las ideas topológicas y geométricas en el estudio de la dinámica. La formalización del concepto de bifurcación se produce al ponerlo en relación con el de estabilidad estructural, introducido por Andronov y Pontriaguin en 1937. Los mayores progresos se han producido en el contexto de la llamada teoría local de bifurcaciones; es decir, bifurcaciones de los elementos críticos: equilibrios y órbitas periódicas.

Dicha teoría hace uso de dos instrumentos básicos: reducción mediante el teorema de la variedad de centros, y simplificación mediante formas normales.

Estas dos técnicas son ampliamente utilizadas en este trabajo, así mediante el análisis de las posibles bifurcaciones de los sistemas estudiados es factible obtener información valiosa sobre el comportamiento dinámico, muchas veces de una gran complejidad, de los mismos. La valiosa información obtenida en el estudio de las bifurcaciones locales que se lleva a cabo, es utilizada como punto de arranque para el uso de los métodos numéricos de continuación que aplicamos: aproximaciones locales bien en el espacio de órbitas (por ejemplo, condiciones iniciales aproximadas de órbitas periódicas u homoclinas), bien en el espacio de parámetros (por ejemplo, aproximaciones a curvas de bifurcación).

En este trabajo se lleva a cabo un estudio general de los modelos Lotka-Volterra, haciéndose un breve recorrido por los comienzos de la aplicación de la matemática en la ecología y las principales ideas y métodos utilizados en la modelización de poblaciones, siguiendo las ideas recogidas en el libro "Nonlinear Dynamics of Interacting Population" de A. D. Bazikyn. De todos estos modelos nos fijamos en uno concreto, cuyo análisis desde el punto de vista de los sistemas dinámicos es el objetivo principal del presente trabajo (equilibrios, estabildades, ciclos límites, degeneraciones, ...).

Se realiza un estudio de la bifurcación de Hopf, aplicando el teorema de Poincaré-Andronov-Hopf, para posteriormente llevar a cabo el análisis de dicha bifurcación en el sistema anteriormente planteado. Este análisis permite obtener los valores de los parámetros para los que el sistema experimenta la citada bifurcación, así como el número de ciclos límite que surgen en función de los mismos.

También se analiza la bifurcación de Takens-Bogdanov, y su correspondiente aplicación a nuestro sistema particular. Los resultados teóricos obtenidos son corroborados mediante técnicas de continuación numérica, obteniéndose varios diagramas de bifurcaciones y retratos de fases de una órbita periodica de periodo alto, que podemos interpretar como una aproximación a una órbita de tipo homocliano. El trabajo finaliza con el estudio de la bifurcación de Takens-Bogdanov con simetría y su posterior aplicación a un campo simétrico particular haciendo un análisis similar al realizado en el caso no simétrico.